

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ESSAI SUR L'UNITÉ
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
DANS LEUR
DÉVELOPPEMENT ACTUEL

THÈSE COMPLÉMENTAIRE POUR LE DOCTORAT ES LETTRES

PRÉSENTÉE

par **Albert LAUTMAN**

Ancien Elève de l'Ecole Normale Supérieure
Agréé de Philosophie
Professeur au Lycée de Chartres

PARIS

HERMANN & C^{ie}. ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne

—
1937

THÈSE
POUR
LE DOCTORAT



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549924_0001

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ESSAI SUR L'UNITÉ
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
DANS LEUR
DÉVELOPPEMENT ACTUEL

THÈSE COMPLÉMENTAIRE POUR LE DOCTORAT ÈS LETTRES

PRÉSENTÉE

par **Albert LAUTMAN**

Ancien Elève de l'Ecole Normale Supérieure
Agrégré de Philosophie
Professeur au Lycée de Chartres



PARIS

HERMANN & C^{ie}. ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne

—
1937

La Faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les Thèses; ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.





INTRODUCTION

La distinction des deux mathématiques.

EN 1928, dans la préface de son livre célèbre : *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hermann WEYL écrivait (1) :

« Si mes vues sont exactes, il règne entre le développement des mathématiques et celui de la physique, à l'époque actuelle, un parallélisme aussi mystérieux qu'indiscutable. La mathématique occidentale n'a pas tant suivi aux siècles précédents les conceptions grecques que les courants d'idées issus de l'Inde et diffusés par les Arabes : elle a en effet affirmé la priorité logique du concept de nombre par rapport à la géométrie. Il en est résulté que l'on a constamment entrepris l'étude des différents domaines de grandeurs avec un même et universel concept de nombre, élaboré de façon abstraite, indépendamment de toute application éventuelle. On peut dire, par contre, que nous assistons aujourd'hui en mathématiques à un renversement complet de points de vue ; il nous apparaît en dernière analyse que la conception la plus profonde est la conception grecque selon laquelle tout domaine entraîne l'existence d'un système de nombres qui lui soit propre et le caractérise. Pour

(1) Hermann WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel Verlag, Leipzig. 1^{re} édition, 1928, préface p. vi.

l'algébriste d'aujourd'hui, le continu des nombres réels ou des nombres complexes n'est plus qu'un « corps » ou un « corps antisymétrique » parmi une infinité d'autres qui ont droit à la même considération. (La propriété d'être antisymétrique résulte de ce que l'on n'y conserve pas la loi de commutativité de la multiplication). Les nouvelles recherches axiomatiques relatives en particulier aux fondements de la géométrie projective forment le pendant géométrique de cette tendance. Toute cette nouvelle mathématique, celle de la théorie des groupes et des algèbres abstraites, est animée d'un esprit nettement différent de celui de la « mathématique classique », qui a trouvé dans la théorie des fonctions de variable complexe son plus haut épanouissement. En ce qui concerne la physique, le continu des nombres réels y conserve bien son privilège inébranlable pour les mesures physiques ; mais le sens profond de la nouvelle mécanique quantique d'HEISENBERG et de SCHRÖDINGER réside à n'en pas douter dans le fait d'attacher à chaque édifice physique un système propre de grandeurs, une algèbre non-commutative au sens mathématique du terme et dont les éléments sont formés par les grandeurs physiques elles-mêmes».

Ce texte affirme de la façon la plus nette l'existence d'une division essentielle dans les mathématiques contemporaines ; il faudrait en effet distinguer l'une de l'autre la mathématique « classique » qui, partant de la notion de nombre entier aboutit à l'analyse, et la mathématique « moderne » qui s'opposant à la mathématique des nombres, affirme au contraire le primat de la notion de domaine par rapport aux nombres attachés à ce domaine.

L'existence d'une mathématique nouvelle, animée d'un esprit bien différent de celui de la mathématique du siècle passé n'est pas douteuse. L'analyse du XIX^e siècle est, comme son nom l'indique, analyse de l'infiniment petit : c'est, en théorie de fonctions, la convergence des séries, le passage à la limite, la continuité, la dérivation et l'intégra-

tion ; c'est, en théorie des équations différentielles, la recherche de l'intégration locale au voisinage de l'origine ; c'est la géométrie différentielle telle qu'elle résulte des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de GAUSS et des *Applications, de l'Analyse à la Géométrie* de MONGE : théorie des contacts, des courbures, des enveloppes, etc. . . Quel que soit pourtant l'éclat dont ait brillé cette analyse de l'infiniment petit, elle n'a pas empêché pendant tout le cours du XIX^e siècle, l'éclosion des idées dont le développement devait aboutir à la mathématique synthétique de l'époque moderne. Certaines de ces théories nouvelles, comme la théorie des ensembles, sont dues aux difficultés mêmes de l'analyse et à la nécessité de trouver un moyen de les surmonter ; d'autres comme la théorie des groupes ont leur origine dans des problèmes algébriques totalement étrangers à l'analyse ; nous ne nous arrêterons pas à ces questions d'origine, car notre but est ici seulement de caractériser dans leurs ressemblances communes les diverses théories qui, par opposition à l'analyse, ont pour objet l'étude de la structure globale d'un « tout ».

Envisageons en premier lieu la topologie. On distingue parfois à l'heure actuelle deux sortes de topologie : la topologie qui s'appuie sur les méthodes de la théorie des ensembles de points et la topologie combinatoire, ou topologie algébrique, qui caractérise de façon arithmétique ou algébrique les propriétés des figures invariantes par une transformation continue. Le caractère global de ces deux théories est évident. Elles généralisent en effet des considérations intuitives de géométrie synthétique comme le fait pour une surface d'être ouverte ou fermée, d'avoir des trous ou de se recouvrir elle-même par endroits. Le développement considérable de la topologie contemporaine vient de ce qu'il est actuellement impossible de concevoir une théorie d'analyse qui ne reposerait pas sur une étude topologique préalable du domaine de définition des fonctions envisagées.

Considérons par exemple l'expression $y = f(x)$. Cette expression affirme l'existence d'une correspondance ponctuelle entre un domaine du plan des x et un domaine du plan des y . La fonction f qui assure cette correspondance peut être parfaitement déterminée de façon unique par la topologie des deux domaines en question, sans qu'il soit besoin de connaître l'expression algébrique ou transcendante qui donne la valeur de y à partir de celle de x (1). Cette nécessité d'appuyer l'analyse sur la topologie remonte à RIEMANN en ce qui concerne les fonctions de variable complexe, et la topologie dont il s'agit est celle que l'on a appelée depuis la topologie combinatoire ; quant à la théorie des fonctions de variables réelles, elle est depuis les travaux de CANTOR, de M. BOREL, de M. LEBESGUE intimement liée à la topologie des ensembles de points et à la « mesure » globale des domaines qu'ils constituent. La distinction que WEYL établit entre l'analyse classique et la mathématique géométrique moderne ne saurait donc tendre à opposer les unes aux autres les méthodes de la théorie des fonctions et celles de la topologie ; ce sont les mêmes, et il n'y a pour s'en convaincre qu'à lire le livre de WEYL que nous avons souvent cité dans notre thèse principale : « *Die Idee der Riemannschen Fläche* ».

En opposant les méthodes de la mathématique moderne à celles de la mathématique classique, WEYL pense, et les indications qu'il donne le prouvent, aux théories de l'algèbre moderne, telles qu'on les trouve exposées par exemple dans les deux tomes de l'ouvrage de M. VAN DER WAERDEN : *Moderne Algebra* (Berlin Springer, 1930). Nous voudrions rapidement insister sur les différences qui séparent l'esprit de l'arithmétique et de l'analyse classiques de l'esprit de

(1) Certains auteurs comme M. HELMUT HASSE distinguent ainsi nettement la notion de fonction « au sens de l'analyse » de la notion de fonction « au sens de l'algèbre ».

l'arithmétique et de l'algèbre modernes : théorie des groupes, des anneaux, des corps, des idéaux, des systèmes hyper-complexes, etc...

La mathématique classique est constructiviste, tout d'abord en ce qui concerne la définition des opérations de l'analyse à partir des opérations de l'arithmétique élémentaire, mais aussi et surtout en ce qui concerne la génération individuelle des nombres réels ou complexes à partir des nombres entiers. L'algèbre moderne est au contraire axiomatique, et il en résulte qu'en se donnant les axiomes auxquels obéissent les éléments d'un groupe ou d'un corps, on se donne par là-même, d'un coup, la totalité souvent infinie des éléments du groupe ou du corps. Ces éléments ne sont même plus en général susceptibles d'être individuellement construits à partir de l'arithmétique des nombres entiers ; ils peuvent être en fait de nature quelconque, ce sont aussi bien des nombres que des vecteurs, des opérateurs, des transformations, des matrices, etc... .

Cette axiomatisation des théories algébriques modernes entraîne des conséquences qui paraissent à WEYL essentielles : La première est relative à la priorité de la structure globale d'un domaine par rapport aux nombres attachés à ce domaine. Ceci peut s'entendre en deux sens différents mais complémentaires l'un de l'autre. Le domaine dont parle WEYL peut être tout d'abord le « domaine de grandeurs » (ou au sens restreint du mot : l'algèbre) que constituent les grandeurs étudiées elles-mêmes, dont les propriétés individuelles sont alors commandées par les lois d'organisation du « tout » dont elles sont les éléments. Ce qui caractérise en effet une algèbre ce ne sont pas les éléments dont elle est l'ensemble, mais le fait que, quels que soient les éléments que l'on en considère, ils soutiennent entre eux des relations par quoi s'affirme leur appartenance à cette algèbre.

On peut ensuite affirmer la priorité de la notion de domaine par rapport à la notion de nombre, en considérant

l'appropriation d'un système de nombres ou de grandeurs à un domaine défini au préalable de façon géométrique, topologique, ou même physique. Nous avons déjà fait allusion plus haut aux liaisons qui unissent la topologie de certains domaines à l'existence de fonctions définies sur ces domaines ; la liaison de la topologie et de l'algèbre est infiniment plus étroite car les invariants algébriques attachés à un domaine sont non seulement définis sur lui, mais servent de plus à l'explorer et à le reconnaître.

Il est un autre aspect qui distingue, dans le texte de WEYL, l'algèbre moderne de la mathématique classique, c'est celui qui est relatif à la non-commutativité de la multiplication. L'algèbre non-commutative, où un produit ab est différent d'un produit ba , s'écarte aussi radicalement de l'algèbre ordinaire que l'algèbre de la logique où $a \times a = a$. L'algèbre de la logique ne constitue pourtant pas à vrai dire une mathématique nouvelle car son champ d'application est trop restreint, tandis que les algèbres non-commutatives ont une importance de plus en plus considérable, aussi bien en mathématiques qu'en physique.

On peut enfin décrire une quatrième caractéristique des théories de l'algèbre moderne qui, pour n'être pas formulée dans le texte de WEYL, n'en fait pas moins corps avec les précédentes : en opposition à l'analyse du continu et de l'infini, les structures algébriques ont un aspect nettement fini et discontinu. Quelle que soit l'infinité des éléments qui constituent un groupe, un corps, une algèbre (au sens restreint du mot), les méthodes de l'algèbre moderne consistent le plus souvent à imposer à ces éléments une division en classes d'éléments équivalents, et à substituer ainsi à un ensemble infini la considération d'un nombre de classes qui, dans les applications, est le plus souvent fini.

Les méthodes et les conceptions fondamentales de l'algèbre moderne étant ainsi distinguées de celles de l'analyse, on peut chercher à interpréter le sens de cette dualité qui

apparaît profondément installée au sein des mathématiques contemporaines. Est-ce une dualité essentielle entre théories irréductibles les unes aux autres, ou bien n'est-ce qu'une dualité de méthodes susceptibles d'être un jour rapprochées ? Le texte de WEYL que nous avons cité plus haut ne contient pas de réponse nette à cette question ; il suggère cependant l'idée qu'il y aurait plus qu'une opposition de méthodes entre la théorie des fonctions de variable complexe et l'algèbre ; par contre HILBERT a plusieurs fois exprimé sa conviction en la possibilité de trouver une méthode d'élaboration conjointe de l'algèbre et de l'analyse : « eine methodisch einheitliche Gestaltung von Algebra und Analysis » (1). Nous nous proposons dans les pages qui vont suivre, de faire voir comment la mathématique moderne est engagée dans la voie de cette unification de l'algèbre et de l'analyse, et cela par la pénétration de plus en plus poussée des méthodes structurales et finitistes de l'algèbre dans le domaine de l'analyse et du continu. En somme le conflit des méthodes entre l'algèbre et l'analyse se dissiperait au profit de l'algèbre ; la distinction des deux mathématiques de WEYL semble ainsi ne correspondre qu'aux conditions historiques du développement des mathématiques, et laisser intacte l'unité des mathématiques et l'unité de l'intelligence.

Nous essaierons de montrer dans les quatre chapitres de cet ouvrage, comment on peut retrouver dans les théories modernes de l'analyse, les aspects qui nous ont paru caractériser l'algèbre moderne. L'idée algébrique de dépendance d'une grandeur par rapport au domaine auquel elle appartient nous a amené à étudier l'influence de la structure « dimensionnelle » d'un ensemble sur le mode de décomposition individuelle de ses éléments, et à envisager l'importance des décompositions dimensionnelles en théorie de fonctions (chapitre I). La priorité de la topologie de cer-

(1) Cf. D. HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 57.

tains domaines sur les nombres attachés à ces domaines se retrouve dans le rôle des métriques non-euclidiennes de la théorie des fonctions analytiques (Chapitre II) ; nous étudions ensuite (chapitre III) l'algèbre non-commutative qui intervient dans la théorie de l'équivalence des équations différentielles. Enfin nous montrons comment la considération de structures algébriques finies et discontinues peut servir à déterminer l'existence de fonctions de variable continue (chapitre IV).

CHAPITRE I

Structure d'un domaine de grandeurs et décomposition de ses éléments.

Les considérations dimensionnelles en analyse.

On peut envisager la décomposition d'un être mathématique à deux points de vue bien différents : Tantôt la décomposition met en lumière les propriétés particulières d'un être au sein de l'ensemble auquel il appartient, et le caractérise par la spécificité de sa structure propre ; tantôt au contraire la décomposition des êtres d'un même ensemble se fait selon un plan commun à tous et traduit ainsi non pas seulement leurs propriétés particulières, mais également leur appartenance à un même ensemble dont la structure globale se réfléchit en celle de ses éléments.

Le type des décompositions de première espèce est la décomposition arithmétique d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers, égaux ou inégaux. Cette décomposition n'est possible en arithmétique élémentaire que d'une seule façon et tout nombre se trouve ainsi caractérisé de façon unique par les facteurs qui lui sont propres.

Nous prendrons comme type des décompositions de seconde espèce, la décomposition algébrique-géométrique d'un vecteur $\vec{X}$ dans un espace vectoriel R à n dimensions. Soit

dans cet espace un système de n vecteurs $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ linéairement indépendants, c'est-à-dire tels que l'équation :

$$a_1 \vec{e}_1 + \dots a_n \vec{e}_n = 0$$

ne soit résoluble que si tous les coefficients a_i s'annulent. L'espace étant à n dimensions, ces vecteurs forment un système de base ou système fondamental pour l'ensemble des vecteurs $\vec{X}$ de l'espace. Ceci veut dire que tout vecteur $\vec{X}$ peut être représenté par une décomposition du type suivant :

$$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + \dots x_n \vec{e}_n.$$

Ces décompositions diffèrent nettement des décompositions de première espèce. Les coefficients $x_1 \dots x_n$ caractérisent bien, il est vrai, de façon unique le vecteur $\vec{X}$ dans le système de base adopté, mais le fait que tout vecteur peut être décomposé en n composantes, traduit moins une propriété individuelle de ces vecteurs que leur appartenance à un espace à n dimensions. Ce sont les propriétés dimensionnelles globales de cet espace qui imposent ainsi un mode uniforme de décomposition à chacun de ses éléments, et cette influence de la structure de l'ensemble sur la nature des éléments se manifeste de façon encore plus frappante lorsqu'on peut représenter l'espace R comme une « somme directe » de sous-espaces indépendants les uns des autres :

$$R = R_1 \oplus R_2 \dots \oplus R_n$$

Chacune des R_i contient alors tous les vecteurs $x_i \vec{e}_i$ de même indice, de sorte que tout vecteur $\vec{X}$ est ainsi obligé, de par son appartenance à R , d'avoir une composante dans chacun des n sous-espaces de la décomposition de R .

Les décompositions de seconde espèce présentent encore un autre aspect essentiel. Les n vecteurs de base d'une

pareille décomposition, $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ sont, au même titre que $\vec{X}$, vecteurs de l'espace R , alors que les facteurs d'une décomposition de première espèce sont toujours, comme nous verrons plus loin, de nature plus simple que les êtres qu'ils caractérisent. Les vecteurs de l'espace R présentent donc entre eux de multiples formes de solidarité, et une décomposition en composantes traduit non seulement la structure dimensionnelle de l'espace global, mais aussi le choix du système de base adopté pour soutenir et organiser les relations qui unissent tous les éléments de l'espace à un ensemble fondamental de n d'entre eux.

Il est possible de retrouver en algèbre les deux types de décomposition que nous venons de distinguer. Le théorème que l'on a longtemps appelé le théorème fondamental de l'algèbre est un théorème de décomposition « propre ». Il énonce que tout polynôme en x de degré m est égal au produit d'une constante par m facteurs de la forme $(x-\alpha)$ égaux ou inégaux :

$$f(x) = C (x-\alpha_1) (x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_m).$$

A cette décomposition qui met en lumière les racines propres d'un polynôme, nous voudrions opposer toutes les décompositions « imposées » dans les théories modernes de l'algèbre. Considérons par exemple un système hypercomplexe. Un pareil système O est défini par un ensemble $b_1 \dots b_n$ d'éléments de base et un corps commutatif P dont les éléments agissent comme multiplicateurs sur les éléments de la base. On obtient ainsi pour O la décomposition suivante :

$$(I) \quad O = b_1 P + \dots b_n P;$$

(P désignant l'ensemble des nombres du corps P), et pour chaque a de O

$$(II) \quad a = b_1 \lambda_1 + \dots b_n \lambda_n = \lambda_1 b_1 + \dots \lambda_n b_n \quad (\lambda_i \in P)$$

La loi de décomposition individuelle (II) inscrit ainsi dans chaque élément a de O les propriétés structurales (I) du système auquel ces éléments appartiennent.

Les deux espèces de décomposition algébrique ne sont du reste pas totalement étrangères l'une à l'autre. La décomposition « propre » d'un polynôme en un produit de facteurs est étroitement liée à la nature globale du corps où l'on essaie cette décomposition. Le polynôme x^2-2 n'a pas de racine dans le corps k des nombres rationnels et n'est décomposable que dans un corps qui contienne au moins le corps $k(\sqrt{2})$ (1). Le théorème fondamental de l'algèbre relatif à la décomposition complète en m facteurs de tout polynôme de degré m n'est au fond que la traduction d'une propriété globale du corps des nombres complexes: celle d'être algébriquement fermé. On retrouve de même une pareille dépendance par rapport au corps de base (*Abhängigkeit vom Grundkörper*) dans les décompositions arithmétiques. Le nombre 21 n'est décomposable en un produit unique de facteurs premiers que dans le corps des nombres rationnels, où l'on a : $21 = 3 \times 7$. Par contre on peut le décomposer d'une deuxième façon dans le corps $k(\sqrt{-5})$ où l'on a en plus de $21 = 3 \times 7$, la décomposition suivante : $21 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$. Les décompositions propres sont donc dans une certaine mesure liées au domaine de base comme les décompositions « imposées ». Une différence essentielle subsiste néanmoins : Les décompositions propres étudient toujours les êtres mathématiques isolément, indépendamment de tous ceux qui peuvent jouir de propriétés analogues, tandis que les décompositions de seconde espèce imposent à tous les éléments d'un ensemble une même structure qui résulte de la structure dimensionnelle de l'ensemble auquel ils appar-

(1) Le corps $k(\sqrt{2})$ est engendré par « l'adjonction » de $\sqrt{2}$ au corps des nombres rationnels.

tiennent, et établissent ainsi une étroite dépendance entre la totalité des êtres étudiés et un certain nombre d'entre eux pris comme système de base. La dépendance par rapport au corps de base que présentent parfois les décompositions de première espèce est donc bien différente de l'interdépendance des éléments entre eux dans les systèmes globaux de l'algèbre contemporaine, et que mettent en lumière les décompositions de seconde espèce.

Avant de rechercher en analyse l'importance respective de ces deux modes de décomposition d'un être mathématique, nous voudrions montrer comment l'interdépendance linéaire des éléments d'un ensemble est en rapports étroits avec la théorie des systèmes d'équations algébriques linéaires.

Considérons tout d'abord le système homogène (sans second membre) :

$$\begin{array}{rcl}
 & a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\
 \text{(III)} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0
 \end{array}$$

Soit r le rang du système, c'est-à-dire le degré du plus grand déterminant non nul formé avec les coefficients du système (III). On appelle solution du système, tout vecteur $\vec{X}$ dont les coordonnées $x_1 \dots x_n$ satisfont aux équations (III) et l'on démontre que pour $r < n$, il existe un nombre maximum de $n - r$ solutions linéairement indépendantes formant un système fondamental de solutions. Toute solution $\vec{X}$ du système (III) est une combinaison linéaire de solutions fondamentales,

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}_1 + \dots + c_{n-r} \vec{X}_{n-r}$$

et le système (III) définit ainsi un espace vectoriel à $n - r$ dimensions. Nous n'aborderons pas ici le cas d'un système non

homogène, c'est-à-dire dont les seconds membres ne sont pas nuls comme dans (III) ; indiquons simplement que l'on retrouve parfois dans l'étude de ces systèmes l'idée dimensionnelle de la composition d'une solution générale à partir d'une solution particulière quelconque et d'un système fondamental de solutions du système homogène correspondant.

Cette jonction qui apparaît ainsi entre la théorie des décompositions de seconde espèce et la résolution des équations algébriques linéaires est à notre point de vue très importante, car c'est par la considération de pareils systèmes d'équations que s'opère très souvent en analyse la substitution du point de vue synthétique des décompositions dimensionnelles au point de vue individuel des décompositions propres.

Le domaine des décompositions de seconde espèce est avant tout formé par la représentation approchée de fonctions appartenant à différents espaces fonctionnels. On sait que les fonctions trigonométriques $1, \cos x, \cos 2x, \dots; \sin x, \sin 2x \dots$, forment dans l'espace des fonctions $f(x)$ continues et différentiables, pour $-\pi \leq x \leq \pi$ avec $f(-\pi) = f(\pi)$, un système de fonctions de base tel que pour toute fonction $f(x)$ de l'espace, on ait le développement en série de FOURIER :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ;$$

les a_n et les b_n satisfaisant à certaines conditions déterminées.

Nous avons de même rappelé ailleurs les propriétés analogues de l'espace des fonctions de carré sommable. Cet espace est constitué par l'ensemble des fonctions $f(s)$ définies sur un espace mesurable E , telles que $\int_E f(s) d\mu$ (1) existe et que $\int_E |f(s)|^2 d\mu$ ait une valeur finie. Un pareil espace est

(1) μ est ici la mesure de l'espace E , au sens de M. LEBESGUE.

isomorphe à l'espace de HILBERT (1), c'est donc un espace vectoriel à une infinité de dimensions et il existe dans cet espace une infinité de systèmes de base $\varphi_1(s), \varphi_2(s) \dots$ formés chacun d'une infinité de fonctions orthonormales (2) telles que toute fonction de l'espace soit décomposable en série :

$$f(s) = x_1 \varphi_1(s) + x_2 \varphi_2(s) + \dots$$

Ce résultat a joué un grand rôle dans l'histoire des problèmes que nous étudions ici, car c'est par l'extension de ces méthodes algébriques de décomposition de seconde espèce aux fonctions inconnues d'équations intégrales ou d'équations aux dérivées partielles, qu'HILBERT a conçu une possibilité d'élaboration conjointe de l'algèbre et de l'analyse. L'unification des disciplines mathématiques doit s'opérer ainsi par la pénétration dans le domaine de l'analyse des méthodes dimensionnelles et finitistes d'origine algébrique. Les décompositions de seconde espèce étant liées en algèbre à l'étude des systèmes d'un nombre fini d'équations, d'un nombre fini de variables, HILBERT a développé la théorie des systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité de variables pour trouver des théorèmes de combinaison linéaire analogues à ceux du fini, et applicables à la théorie des équations intégrales. Voici un texte où HILBERT exprime avec une clarté admirable son espoir d'unifier l'algèbre et l'analyse par une pareille généralisation de méthodes algébriques :

« La théorie des formes à une infinité de variables < est > un domaine nouveau, et dans une certaine mesure intermédiaire entre l'algèbre et l'analyse, qui par ses méthodes

(1) Cf. notre thèse principale, chap. V.

(2) Ceci veut dire que l'on a les relations suivantes entre les fonctions $\varphi_n(s)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_m(s) \varphi_n(s) ds = 0; \quad m \neq n \\ & \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_m(s)|^2 ds = 1. \end{aligned}$$

s'appuie sur l'algèbre mais qui appartient à l'analyse par la nature transcendante de ses résultats (I). »

Nous allons maintenant rapidement montrer comment HILBERT opère la réduction d'un problème d'analyse à un problème algébrique.

Soit l'équation intégrale linéaire :

$$(IV) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 k(s, t) \varphi(t) dt$$

où $\varphi(s)$ est la fonction cherchée et où $f(s)$ et $k(s, t)$ sont données. HILBERT construit tout d'abord un système quelconque de fonctions continues orthonormales $\omega_p(s)$ ($0 \leq s \leq 1$), qui satisfasse de plus, relativement à une fonction continue quelconque $u(s)$, aux conditions d'achèvement suivantes :

$$\int_0^1 u(s)^2 ds = \left[\int_0^1 u(s) \omega_1(s) ds \right]^2 + \left[\int_0^1 u(s) \omega_2(s) ds \right]^2 + \dots + \dots$$

Un pareil système forme un système de base dans l'espace des fonctions $u(s)$. HILBERT introduit ensuite les expressions suivantes :

$$x_p = \int_0^1 \varphi(s) \omega_p(s) ds, \quad f_p = \int_0^1 f(s) \omega_p(s) ds,$$

$$k_q(s) = \int_0^1 k(s, t) \omega_q(t) dt, \quad k_{pq} = \int_0^1 \int_0^1 k(s, t) \omega_p(s) \omega_q(t) ds dt,$$

qui sont telles que

$$\Sigma x_p^2, \Sigma f_p^2, \Sigma k_q(s)^2, \Sigma k_{pq}(s)^2$$

convergent.

Dans ces conditions on déduit de l'équation intégrale (IV),

(I) D. HILBERT, *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen Variablen*, dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 59.

le système suivant d'une infinité d'équations algébriques linéaires à une infinité d'inconnues :

$$(V) \quad \begin{array}{rcl} (1-\lambda k_{11})x_1 - \lambda k_{12}x_2 \dots\dots\dots & = & f_1 \\ - \lambda k_{21}x_1 + (1-\lambda k_{22})x_2 \dots\dots & = & f_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

La résolution de l'équation intégrale (IV), problème d'analyse, est donc ramenée à la résolution du système d'équations algébriques (V) (1).

Soient $x_1, x_2, \dots$ un ensemble de valeurs formant une solution de ce système algébrique ; on obtient une solution continue de l'équation intégrale (IV) en formant la série uniformément convergente :

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_q k_q(s) x_q$$

et il est facile de démontrer que cette solution $\varphi(s)$ admet une décomposition en série de FOURIER,

$$(VI) \quad \varphi(s) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \omega_p(s)$$

le système de base étant le système des $\omega_p(s)$ adopté et les coefficients x_p obéissant aux relations :

$$x_p = \int_0^1 \varphi(s) \omega_p(s) ds.$$

L'expression (VI) représente bien un développement « de seconde espèce » de la fonction $\varphi(s)$ cherchée, et c'est ce résultat d'allure algébrique qu'HILBERT avait en vue dans la constitution de sa théorie.

Nous allons rechercher maintenant dans la théorie des fonctions analytiques le rôle des décompositions de première

(1) Tout ce paragraphe d'après : E. HELLINGER, *Hilberts' Arbeiten über Integralgleichungen*, dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 106.

espèce et verrons ensuite comment dans ce domaine également, les considérations dimensionnelles issues de l'algèbre, ont pu charger d'un sens nouveau les résultats des théorèmes de décomposition propre, d'inspiration arithmétique.

La décomposition propre d'un polynôme est celle qui met en évidence ses racines. La fonction analytique qui ressemble le plus à un polynôme est la fonction entière, qui ne possède de singularité qu'à l'infini, et il est possible de mettre en évidence les zéros d'une pareille fonction par une décomposition en produits, analogue à la décomposition d'un polynôme en facteurs du 1^{er} degré. Soient $a_0, a_1, \dots$ une suite infinie de points différents de 0. Le produit :

$$\Pi = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{k_n}} \right\}$$

représente dans certaines conditions une fonction entière qui admet les points $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ comme zéros, et toute fonction entière qui admet également ces points comme zéros est représentée par l'expression :

$$G(z) = e^{H(z)} \cdot \Pi$$

où $H(z)$ est une fonction entière quelconque.

Envisageons maintenant les fonctions méromorphes, c'est-à-dire les fonctions qui admettent dans le fini, un nombre fini de pôles $a_1, \dots, a_n$, au voisinage desquels leur développement en série est de la forme :

$$f(z) = \frac{A_1}{(z - a_1)^m} + \frac{A_2}{(z - a_2)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(z - a_i)} + G(z); \quad (a_i = a_1, \dots, a_n),$$

$G(z)$ étant une fonction entière.

L'ensemble de termes fractionnaires de ce développement constitue la partie principale $g_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$ de $f(z)$ correspondant au pôle a_i .

Ceci posé, il est possible de se donner à l'avance les pôles

et les parties principales d'une fonction méromorphe et de recomposer ainsi cette fonction à partir de fractions partielles (les différentes parties principales), n'admettant plus chacune qu'un seul pôle :

$$(VII) \quad f(z) = g_1 \left(\frac{1}{z - a_1} \right) + g_2 \left(\frac{1}{z - a_2} \right) + \dots + g_p \left(\frac{1}{z - a_n} \right) + G(z).$$

La décomposition d'une fonction entière en produits, et la décomposition d'une fonction méromorphe en fractions partielles sont essentiellement des décompositions de première espèce, car elles révèlent bien l'existence d'une infinité de fonctions admettant comme zéros ou comme pôles des points donnés, mais elles ne révèlent rien quant à la structure globale de cette infinité. Elles s'attachent en effet exclusivement aux propriétés individuelles des fonctions étudiées et nullement à l'organisation de la classe que ces fonctions peuvent constituer. Nous allons voir maintenant reparaître, au sein de ces problèmes, les considérations dimensionnelles, et s'établir à nouveau des solidarités algébriques entre éléments d'un même ensemble.

Le théorème de RIEMANN-ROCH se propose d'étudier la structure de l'ensemble de fonctions qui admettent comme pôles sur une surface de RIEMANN n points donnés $a_1 \dots a_n$ et qui sont uniformes partout ailleurs sur la surface (I).

En vertu du théorème de décomposition en fractions partielles, les fonctions étudiées peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(VIII) \quad F(z) = A_1 Y_{a_1}(z) + A_2 Y_{a_2}(z) + \dots + A_n Y_{a_n}(z) + C$$

où les $Y_{a_i}(z)$ sont des intégrales abéliennes de seconde espèce qui n'admettent chacune qu'un seul pôle, le point a_i . Cette décomposition est absolument équivalente à (VII) ; les fonctions $F(z)$ sont présentées sous la forme d'une somme

(I) Voir pour tout ceci : OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. II, 2.

de fonctions, d'un certain point de vue plus simples que la fonction $F(z)$ puisqu'elles n'ont chacune qu'un pôle ; en tout cas ces fonctions ne font pas partie elles-mêmes de l'ensemble des fonctions $F(z)$; la décomposition obtenue est donc bien une décomposition de première espèce, et c'est la détermination des coefficients A_i qui va introduire dans ce problème d'analyse un point de vue dimensionnel d'inspiration algébrique.

On sait (1) qu'une surface de RIEMANN multiplement connexe peut être rendue simplement connexe par un « découpage canonique ». Voici rapidement ce qu'il faut entendre par là : La surface de RIEMANN peut être amenée par déformation continue sous la forme d'un disque à 2 faces percé de p trous ; p étant le genre de la surface. On peut alors tracer sur cette surface un système maximal de $2p$ courbes fermées non réductibles à un point par déformation continue et telles qu'aucune de ces courbes ne divise la surface en deux régions séparées. En découpant la surface suivant ces $2p$ courbes, on obtient ainsi une surface simplement connexe. Les intégrales abéliennes subissent quand la variable passe d'un bord d'une de ces coupures à l'autre un saut qui se manifeste par l'existence d'une discontinuité dans les valeurs de la fonction. On démontre que les intégrales abéliennes de seconde espèce peuvent n'avoir de discontinuités différentes de 0 que pour la moitié p des $2p$ rétrosections tracées sur la surface.

Soient $Q_1(a_1), Q_2(a_1) \dots Q_p(a_1)$ les p discontinuités de l'intégrale $Y_{a_1}(z)$ de la formule (VIII) ; soient de même $Q_1(a_2) \dots Q_p(a_2), \dots Q_1(a_n) \dots Q_p(a_n)$, les discontinuités des fonctions $Y_{a_2}(z) \dots Y_{a_n}(z)$. Pour que la fonction $F(z)$ soit uniforme sur les p coupures où chacune de ses composantes subit une discontinuité, il faut que l'on ait les p relations suivantes :

(1) Cf. notre thèse principale, chap. III.

Les exemples que nous avons donnés nous permettent ainsi de comprendre que s'il y a des modes de pensée différents en mathématiques, il est peu vraisemblable qu'à ces différences de méthodes correspondent des différences de domaines. La dualité des types de décomposition sur laquelle nous avons insisté au cours de ce chapitre est un fait certain qui s'impose à tout observateur, mais cette dualité de méthodes n'aboutit pas à constituer deux mathématiques différentes, celle qui serait une promotion de l'arithmétique des nombres entiers et celle qui serait une extension de l'algèbre. Les mêmes êtres sont étudiables des deux façons et c'est cette rencontre des méthodes qui fait l'unité profonde des mathématiques (1).

(1) Il nous faut signaler ici, l'importance que présente, pour les problèmes que nous avons rencontrés dans ce chapitre, la « théorie arithmétique des fonctions algébriques ». La théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales est chez RIEMANN une théorie d'analyse et s'appuie sur des méthodes transcendantes. DEDEKIND et WEBER ont exposé, en 1882, une théorie purement arithmétique des fonctions algébriques à une variable, où il n'est fait appel, même pour la définition d'un point, qu'à des notions finitistes de l'arithmétique et de l'algèbre. C'est ainsi qu'une fonction algébrique η est caractérisée par un quotient symbolique de deux complexes de points appelés polygones :

$$\eta = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$$

Deux polygones $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ susceptibles de correspondre comme numérateur et dénominateur à une même fonction appartiennent à la même classe de polygones. Les classes ont une *dimension* définie par le nombre des éléments de leur base et le théorème de RIEMANN-ROCH se présente immédiatement dans cette théorie comme lié à l'étude de la dimension de classes de polygones. Le point de vue structural et dimensionnel qui n'apparaît qu'en second lieu dans la théorie ordinaire apparaît ainsi au premier plan dans la théorie « arithmétique ».

CHAPITRE II

Le domaine et les nombres.

Les métriques non-euclidiennes dans la théorie des fonctions analytiques.

Nous avons montré au chapitre I de notre Thèse principale les différences qui séparent la conception synthétique de la conception infinitésimale de la géométrie. La définition riemannienne d'un espace par la formule qui donne la distance de deux points infiniment voisins est une conception purement locale ; l'espace entier y est construit par la juxtaposition de proche en proche de voisinages infinitésimaux et dont l'assemblage n'est pas, sans conventions nouvelles, susceptible de caractéristiques d'ensemble. Par contre, la définition des propriétés d'un espace par celle du groupe de transformations dont les propriétés en question sont les invariants, est une définition globale qui envisage les possibilités d'action du groupe sur la totalité des points de l'espace. Il est souvent possible de définir également dans les espaces « globaux » une métrique invariante par rapport au groupe qui opère sur l'espace, mais cette métrique peut être bien différente des métriques riemanniennes (1). Celles-ci ne font en effet appel qu'à des notions

(1) Nous avons indiqué dans notre thèse principale comment, d'après les travaux de M. CARTAN, la métrique définie globalement pouvait néanmoins être, dans certains cas, riemannienne.

définies au voisinage de chaque point origine considéré, tandis que la formule d'une métrique invariante par rapport à un groupe, contient en général des termes qui se réfèrent aux propriétés d'ensemble de l'espace. On voit donc apparaître ici un nouvel aspect de l'opposition des deux mathématiques. Dans la conception locale, l'expression des nombres qui forment la métrique de la surface est donnée antérieurement à la constitution de la surface puisque la surface résulte justement du rapprochement de voisinages définis par la valeur de la distance de deux points infiniment voisins ; dans la conception synthétique, l'espace préexiste à la métrique, puisque la géométrie de l'espace tout entier influe sur la détermination de la métrique. Les nombres sont alors postérieurs au domaine et il est particulièrement significatif à cet égard que M. WEYL fasse allusion à la géométrie projective dans le texte que ces pages ont pour but de commenter.

La géométrie projective a en effet fourni le premier exemple d'une géométrie où l'on attache à tout couple de points un nombre défini indépendamment de toute référence à la distance euclidienne et satisfaisant néanmoins à certaines conditions formelles qui permettent de le considérer abstraitement comme la « distance » de deux points sur cet espace. La principale de ces conditions concerne l'additivité de la distance : soit $d(a, b)$ le nombre d attaché au couple de points (a, b) ; il faut que l'on ait :

$$d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c).$$

Les axiomes formels qui définissent la notion de distance peuvent être satisfaits par une infinité de systèmes de nombres différents ; l'objet de la géométrie abstraite est de choisir celui qui assure l'invariance de la métrique par rapport aux transformations d'ensemble que l'on envisage sur la surface. En géométrie projective par exemple, la distance de deux points est définie par le rapport anharmonique at-

taché au « jeu » des quatre points suivants : les deux points donnés et les intersections de la droite projective passant par ces deux points avec la conique qui est transformée globalement en elle-même par un sous-groupe du groupe des transformations projectives. On sait comment KLEIN a opéré l'union des notions de métrique projective, dues à CAYLEY et des géométries non-euclidiennes : la géométrie de RIEMANN correspond au cas où « l'absolu », c'est-à-dire la conique projectivement invariante est imaginaire, la géométrie de LOBATCHEWSKY correspond au cas d'une conique réelle et la géométrie d'EUCLIDE au cas où la conique dégénère en deux points imaginaires. Du point de vue qui nous intéresse ici, les géométries non-euclidiennes et la géométrie projective se confondent : on y voit en effet l'appropriation d'un système de nombres à un espace résulter de la considération préalable des propriétés structurales de l'espace, qui reçoit ainsi sur lui un système de nombres fait pour lui.

Nous nous proposons, dans la suite de ce chapitre, de retrouver l'intervention de métriques non-euclidiennes dans la théorie des fonctions analytiques, et ce fait a une très grande importance philosophique. M. WEYL veut en effet ranger toute l'analyse dans la mathématique issue de la notion de nombre entier, pour l'opposer à la mathématique moderne, celle des domaines. Il est certain que même les applications de l'analyse à la géométrie, telles que les ont conçues en France l'école de MONGE, en Allemagne celle de GAUSS, ne sont que des interprétations géométriques de résultats analytiques obtenus indépendamment de toute référence à la géométrie (1). Ce souci d'éliminer de l'analyse les intuitions géométriques est du reste dans l'esprit du cartésianisme, pour lequel la géométrie synthétique est œuvre d'imagination et reste par là-même en deçà des possibi-

(1) Cf. notre introduction, p. 7.

lités infinies du calcul conduit uniquement par l'entendement.

Cette différence de plans entre une analyse purement intellectuelle et une géométrie synthétique, plus sensible, s'est de nos jours presque complètement évanouie, parce que la topologie et la théorie des groupes ont permis la mise au point de méthodes synthétiques en géométrie, qui sont tout aussi intellectuelles que les méthodes de l'analyse. Un renversement s'est ainsi opéré dans les rapports de l'analyse et de la géométrie, et l'analyse a été de nouveau, non pas « astreinte à la considération des figures » mais tout au moins subordonnée à une étude topologique préalable du domaine de définition des fonctions envisagées. Cet aspect nouveau de la théorie des fonctions analytiques est lié au développement de la théorie de la surface de RIEMANN d'une fonction analytique ; nous n'en envisagerons ici que les conséquences relatives à la métrique.

Lorsque POINCARÉ utilisa, le premier semble-t-il, une métrique non-euclidienne dans un problème d'analyse, il crut assister à la rencontre accidentelle et presque inexplicable de deux ordres de pensée totalement étrangers l'un à l'autre. La géométrie non-euclidienne lui avait paru jusqu'alors « un simple jeu de l'esprit qui n'a d'intérêt que pour le philosophe sans pouvoir être d'aucune utilité pour le mathématicien » (1), et il se trouvait qu'elle s'imposait dans la théorie de l'uniformisation de fonctions algébriques. Il nous faut insister un instant sur les conditions où s'est opérée ainsi la liaison de l'ancienne et de la nouvelle mathématique.

Nous avons déjà eu l'occasion de définir le problème de l'uniformisation (2). Etant donné une fonction analytique

(1) Henri POINCARÉ, *Œuvres complètes*, t. I, p. XI (résumé de ses propres travaux par POINCARÉ lui-même).

(2) Cf. notre thèse principale, chap. III.

$\zeta = f(z)$, cette fonction possède en général sur le plan de la variable complexe z , des points de ramification au voisinage desquels elle peut prendre plusieurs valeurs distinctes. Uniformiser la fonction $\zeta = f(z)$, c'est trouver une variable complexe t telle que $\zeta = \varphi(t)$ et $z = \psi(t)$ soient deux fonctions uniformes sur le plan complexe t . La résolution de ce problème exige non seulement la construction de la surface de RIEMANN F correspondant à la fonction $\zeta = f(z)$ mais la construction de la surface universelle de recouvrement $\bar{F}$ de la surface F . Il est possible en effet d'établir une correspondance conforme entre cette surface simplement connexe F et la totalité ou une portion du plan d'une variable complexe t . On déduit alors facilement de l'existence de cette correspondance conforme, l'existence sur le plan t des fonctions uniformes cherchées. Il existe à cet égard trois types de surfaces universelles de recouvrement : celles dont on peut faire la représentation conforme sur le plan complexe ouvert, celles dont on ne peut faire la représentation conforme que sur le plan complété par le point à l'infini, et qui sont topologiquement équivalentes à la sphère complexe et enfin celles dont on peut faire la représentation sur le cercle unité. Plaçons-nous dans ce dernier cas, en n'envisageant pour plus de simplicité qu'une correspondance entre points intérieurs de la surface et points intérieurs du cercle. La surface $\bar{F}$ admet un groupe discontinu de transformations internes, c'est-à-dire que l'on peut faire correspondre à un point P_0 de cette surface autant de points $P_1, P_2, \dots$ qu'il y a sur la surface de RIEMANN de la fonction donnée, de classes de chemins fermés, irréductibles les uns aux autres par déformation continue, et issus du point p_0 correspondant à P_0 . Au groupe des transformations internes de la surface $\bar{F}$ correspond le groupe discontinu des transformations linéaires de l'intérieur du cercle unité en lui-même, et il se trouve que la métrique invariante par ce groupe se confond avec la métrique de la géométrie de LO-

BATCHEWSKY à l'intérieur de ce cercle $|z| < 1$. En convenant alors arbitrairement d'appeler distance non-euclidienne de deux points de la surface $\bar{F}$, la distance non-euclidienne des points correspondants à l'intérieur du cercle unité, POINCARÉ obtenait ainsi sur la surface $\bar{F}$ une métrique « hyperbolique » liée au fait topologique que $\bar{F}$ était représentable sur le cercle unité.

Soient ds la longueur euclidienne d'un arc de la représentation conforme sur le cercle unité, r la distance de cet arc au centre du cercle et $d\sigma$ la longueur hyperbolique (ou non-euclidienne) de l'arc, on a :

$$d\sigma = \frac{ds}{1 - r^2}$$

Dans le cas où la surface $\bar{F}$ est de type elliptique et par conséquent représentable sur la sphère complexe, on peut appeler distance sphérique de deux points la distance des points correspondants sur la sphère, $d\sigma = \frac{ds}{1 + r^2}$, et cette distance est invariante par rapport au groupe des rotations de la sphère.

La longueur euclidienne d'un arc est évidemment unique, puisque la métrique n'est pas définie par rapport aux propriétés spéciales de la surface, mais les longueurs non-euclidiennes étant des nombres attachés par convention à un arc, il est parfaitement possible de conférer à un arc plusieurs métriques non-euclidiennes différentes. Considérons par exemple les surfaces simplement connexes représentables sur le cercle unité. On peut leur conférer à la fois plusieurs métriques différentes, en particulier une métrique hyperbolique $d\sigma = \frac{ds}{1 - r^2}$ invariante par le groupe des transformations internes du cercle en lui-même et une métrique sphérique $d\sigma = \frac{ds}{1 + r^2}$, celle que reçoit le cercle unité lorsqu'on l'envisage comme une portion de sphère. Le choix de la

métrique est alors commandé par la nature des invariants que l'on cherche à obtenir sur la surface.

Nous allons voir maintenant, d'après le livre de M. R. NEVANLINNA : *Eindeutige analytische Funktionen* (1), comment de pareilles considérations s'imposent actuellement dans un problème central de la théorie des fonctions analytiques, celui des valeurs exceptionnelles de PICARD. Considérons une fonction méromorphe à l'intérieur de tout cercle de rayon r , ($r < R < \infty$), avec pour centre le point origine o du plan complexe. Il s'agit d'étudier « l'affinité » de la fonction $w(z)$ pour la valeur a de cette fonction. M. NEVANLINNA introduit pour cela deux expressions, dont l'une, $N(r, a)$ est liée au nombre des valeurs de z intérieures au cercle r de centre o pour lesquelles $w(z)$ prend effectivement la valeur a , et dont l'autre, $m(r, a)$, mesure en quelque sorte l'intensité moyenne avec laquelle les valeurs de $w(z)$ se serrent autour de a sur la circonférence $|z| = r$. Il existe alors entre la fréquence avec laquelle la fonction $w(z)$ atteint une valeur quelconque a et la moyenne de ses écarts par rapport à a , un balancement remarquable. M. NEVANLINNA a en effet démontré le théorème suivant :

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + \text{une quantité bornée ;}$$

où $T(r)$ est une constante relative au cercle $|z| = r$.

Si dans le cercle $|z| < r$, $w(z)$ ne prend que rarement la valeur a , la fonction de fréquence $N(r, a)$ a une valeur très faible qui peut être nulle dans le cas où a est une valeur exceptionnelle de PICARD ; par contre la fonction $w(z)$ s'écarte alors très peu en moyenne de la valeur a sur le cercle $|z| = r$, la fonction $m(r, a)$ en est d'autant plus grande et la somme $N(r, a) + m(r, a)$ atteint bien ainsi la valeur constante $T(r)$. Ce théorème a une très grande importance puisqu'il montre qu'il ne suffit pas, dans l'étude des valeurs exceptionnelles,

(1) 1 vol. Berlin, Springer, 1937.

de chercher les valeurs qu'une fonction n'atteint jamais, ce qu'on faisait jusqu'alors, mais qu'il faut considérer aussi la façon dont la fonction s'en approche.

Soit par exemple la fonction exponentielle e^z qui admet comme valeurs exceptionnelles les valeurs $a = 0$ et $a = \infty$; on a, en appelant $O(1)$ une quantité qui reste bornée (de l'ordre de 1) :

$$N(r, a) = 0, \quad m(r, a) = \frac{r}{\pi} \text{ pour } a = 0, a = \infty.$$

$$N(r, a) = \frac{r}{\pi} + O(1), \quad m(r, a) = O(1)$$

pour une valeur ordinaire de a , de sorte que dans tous les cas :

$$m(r, a) + N(r, a) = \frac{r}{\pi} + \text{éventuellement } O(1).$$

$\frac{r}{\pi}$ est la fonction caractéristique $T(r)$ attachée à la fonction e^z . Pour une valeur $|z| = r$ fixée, $T(r)$ est un invariant et il a été possible à MM. AHLFORS et SHIMIZU de donner grâce à la notion de métrique non-euclidienne sur une surface de RIEMANN, une interprétation géométrique de cet invariant (1).

Considérons le plan complexe de la variable z et le plan complexe de la variable w dont les points représentent les valeurs de la fonction méromorphe $w(z)$ pour $|z| < R \leq \infty$. Soit F l'aire qui correspond sur le plan w au cercle $|z| < r$ du plan z . Introduisons sur le plan w une métrique sphérique. Cette métrique associe à l'aire F une valeur « sphérique », celle de la projection stéréographique de F sur la sphère unité. Soit $A(r)$ la valeur sphérique (divisée par π) de cette aire F qui correspond sur le plan w au cercle $|z| < r$ du plan de la variable complexe z . $A(r)$ est ainsi un invariant attaché

(1) Cf. pour tout ce paragraphe : R. NEVANLINNA, *op. cit.*, chap. VI, § 3.

au cercle de rayon r , et l'on a entre l'invariant $T(r)$ de M. NEVANLINNA et l'invariant $A(r)$ de la théorie géométrique, les relations :

$$\frac{dT(r)}{d \log r} = A(r) \quad \text{ou encore} \quad T(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt.$$

L'invariant de la théorie analytique de M. NEVANLINNA prend donc tout son sens par l'introduction sur la surface de RIEMANN envisagée d'une métrique « globale » spécialement appropriée à la topologie de cette surface : une métrique sphérique.

On peut également arriver à une interprétation géométrique de certains autres théorèmes de la théorie des fonctions méromorphes en introduisant cette fois une métrique hyperbolique de LOBATCHEWSKY-POINCARÉ (1) et même retrouver tous les théorèmes de la théorie en envisageant comme l'a fait M. AHLFORS une métrique quelconque satisfaisant aux axiomes généraux dont nous avons parlé p. 28. Il résulte en tout cas de ces exemples que grâce à la définition de la métrique sur une surface de RIEMANN, la théorie des fonctions analytiques participe largement au courant d'idées de la mathématique nouvelle qui coordonne à chaque domaine un système propre de nombres, choisi eu égard à la structure de ce domaine, et établit ainsi dans une certaine mesure le primat de la synthèse géométrique sur celui de l'analyse « numérique ».

(1) Cf. R. NEVANLINNA, *op. cit.*, p. 242.

CHAPITRE III

L'algèbre des grandeurs non-commutatives.

Les formes de Pfaff et la théorie des équations différentielles.

Celui des aspects de la mathématique nouvelle que nous nous proposons d'examiner ici est relatif à la non-commutativité de la multiplication dans certaines parmi les plus importantes des théories algébriques modernes. Soient a et b deux grandeurs d'une théorie ; cette théorie est non-commutative si l'on a $a b \neq b a$. C'est là une propriété qui distingue profondément ces théories de l'arithmétique et de l'algèbre ordinaires et dont la richesse est considérable, puisqu'elle contient la clé des relations d'incertitude en mécanique quantique.

La mécanique de SCHRÖDINGER associe en effet à toute grandeur physique une expression abstraite qu'on appelle un « opérateur » et deux grandeurs A et B ne sont simultanément mesurables que si les opérateurs qui leur correspondent sont permutables, c'est-à-dire si la multiplication de ces opérateurs est commutative. Or, si l'on fait correspondre (1) à une coordonnée q_k l'opérateur Q_k qui signifie : multiplication par q_k , et à la quantité de mouvement selon

(1) Voir pour tout ceci : L. DE BROGLIE, *La théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique* (Hermann), p. 199.

la coordonnée q_k , l'opérateur $P_k = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$, on trouve que ces opérateurs ne sont pas permutables :

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k} \cdot q_k = -\frac{h}{2\pi i} q_k \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{h}{2\pi i}$$

ou encore :

$$Q_k P_k - P_k Q_k = \frac{h}{2\pi i}$$

Il résulte de ces équations qu'une coordonnée et la quantité de mouvement correspondante ne sont pas simultanément mesurables et l'indétermination dont est affecté le système des deux mesures est elle-même mesurée par la valeur d'une différence de type $ab - ba$.

La théorie des opérateurs de la mécanique quantique n'est, comme l'a montré M. VON NEUMANN (1), qu'un cas particulier de la théorie générale des anneaux (2) d'opérateurs dans l'espace de HILBERT, et les problèmes relatifs à la commutativité ou la non-commutativité de deux éléments jouent dans l'étude de la structure de ces anneaux le même rôle que dans l'étude d'anneaux de nombres algébriques. Cette structure est en effet caractérisée par des possibilités de décomposition dimensionnelle de l'anneau en somme directe de composantes, analogue aux décompositions globales que nous avons décrites au chapitre I, et le point de vue de la commutativité de la multiplication y intervient par le fait que la décomposition globale de l'anneau est, dans certains cas, solidaire d'une décomposition globale du centre de l'anneau. Le centre d'un anneau est formé par l'ensemble des éléments a qui « commutent »

(1) J. VON NEUMANN, *La théorie des anneaux d'opérateurs. Séminaire de mathématiques de l'Institut Poincaré*, année 1934-1935.

(2) Rappelons brièvement qu'un anneau est un ensemble de nombres dans lequel sont définis deux procédés formels de composition : l'addition et la multiplication de deux éléments.

avec tous les autres, et la liaison entre la décomposition de l'anneau et celle de son centre et la suivante : Si l'anneau O se décompose en somme directe de sous-anneaux (jouissant de certaines propriétés particulières) (I)

$$O = o_1 + \dots o_n,$$

le centre Z de l'anneau se décompose en somme directe des centres de différents sous-anneaux de la décomposition de O :

$$Z = Z_1 + \dots Z_n.$$

Nous avons montré au chapitre I comment les théories de l'algèbre moderne pouvaient être caractérisées par l'importance qu'y jouent les théorèmes de décomposition dimensionnelle, et nous voyons maintenant les relations étroites qui unissent l'existence de ces décompositions à la distinction de la multiplication commutative et de la multiplication non-commutative.

Nous nous proposons de montrer, dans la suite de ce chapitre, comment, grâce aux travaux de M. CARTAN et de ses devanciers, le mode de pensée essentiel à l'algèbre moderne qu'est le calcul des grandeurs non-commutatives a pénétré l'analyse contemporaine. Nous allons d'abord définir rapidement le calcul des formes de PFAFF et envisagerons ensuite ses applications à l'analyse.

Etant donné deux séries de différentielles (2) :

$$(I) \quad dx_1, dx_2, \dots, dx_n$$

$$(II) \quad \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$$

on pose, suivant la notation des produits extérieurs de GRASSMANN :

$$[dx_i, dx_j] = dx_i \delta x_j - dx_j \delta x_i$$

(1) Cf. les conférences de M. VON NEUMANN, ainsi que VAN DER WAERDEN : *Moderne Algebra*, t. II, chap. XVI.

(2) Tout ce paragraphe d'après : J. DUBOURDIEU, *Questions topologiques de géométrie différentielle*. Mémoires des Sc. Math., fasc. 78 ; cf. également : E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*. Leipzig, 1934.

Soient maintenant deux formes de PFAFF :

$$\begin{aligned}\omega(d) &= a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots a_n dx_n \\ \varpi(d) &= b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \dots b_n dx_n;\end{aligned}$$

on appelle produit extérieur de ces deux formes, et l'on note par $[\omega, \varpi]$ l'expression bilinéaire par rapport aux deux séries de variables (I) et (II) :

$$[\omega, \varpi] = \omega(d) \varpi(\delta) - \omega(\delta) \varpi(d) = \sum a_i b_j [dx_i, dx_j]$$

Une pareille multiplication symbolique est essentiellement non-commutative et l'on a :

$$[\omega, \varpi] = - [\varpi, \omega]$$

M. CARTAN a également défini une « dérivation symbolique » des formes de PFAFF :

Soit $\omega(d) = a_1 dx_1 + \dots a_n dx_n$ une forme à n variables ; en définissant par $d\omega$ la dérivée symbolique ou dérivée extérieure de $\omega(d)$ on a :

$$\begin{aligned}(\text{III}) \quad d\omega &= d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \sum_1^n da_j \delta x_j - \delta a_j dx_j \\ &= \sum_{(jk)} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \right) [dx_j, dx_k] \\ &= \sum a_{jk} [dx_j, dx_k].\end{aligned}$$

Les produits extérieurs $\sum a_i b_j [dx_i, dx_j]$ et les dérivées extérieures $\sum a_{jk} [dx_j, dx_k]$ sont des formes différentielles de degré 2. On peut de même définir des formes différentielles de degré quelconque par des multiplications ou des dérivations successives, et l'ensemble de ces formes différentielles satisfaisant de façon univoque à une loi d'addition et à une loi de multiplication constitue un anneau comparable aux anneaux d'opérateurs et aux anneaux de nombres algébriques dont nous avons parlé plus haut.

Nous allons voir maintenant le lien immédiat que M. CARTAN a établi entre l'algèbre des formes de PFAFF, telle que

nous venons de la définir et la théorie analytique des équations différentielles (1).

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Posons :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= dy - y' dx \\ \omega_2 &= dy' - F(x, y, y') dx\end{aligned}$$

On obtient deux formes de PFAFF à 3 variables dy, dy' et dx ; et l'équation différentielle est ramenée au système de PFAFF suivant :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= 0\end{aligned}$$

Cet exemple permet de comprendre comment M. CARTAN a pu, de façon générale, ramener l'étude des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles, à l'étude algébrique-géométrique des systèmes de PFAFF correspondants. C'est là un domaine immense où l'on voit de nouveau les méthodes de l'algèbre pénétrer le domaine de l'analyse ; nous allons essayer d'en donner une idée en envisageant tout d'abord les problèmes d'équivalence.

Considérons deux systèmes de formes de PFAFF $\omega_1 \dots \omega_n$, $\varpi_1 \dots \varpi_n$, construites, les premières avec les variables $x_1 \dots x_n$ et leurs différentielles, les secondes avec les variables $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$, et leurs différentielles. Les systèmes sont dits équivalents s'ils sont transformables l'un dans l'autre par des transformations analytiques faisant passer des variables x_i aux variables $\bar{x}_i$, c'est-à-dire telles que l'on ait $\bar{x}_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n)$, les φ_i étant des fonctions analytiques. Ce problème est à

(1) Cf. pour toute la suite : *Séminaire de Mathématiques de l'Institut H. Poincaré*, année 1936-1937 ; E. CARTAN, *Les problèmes d'équivalence*.

double titre un problème d'analyse : tout d'abord par le caractère des fonctions φ_i dont on cherche à démontrer l'existence, et ensuite parce que dans les applications, les formes de PFAFF envisagées correspondent toujours à des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles. Les méthodes de M. CARTAN permettent alors de substituer à ce problème d'analyse un problème d'algèbre : Pour que les deux systèmes de PFAFF $\omega_1 \dots \omega_n, \varpi_1 \dots \varpi_n$ soient équivalents au sens de l'analyse, il faut qu'en deux points correspondants $(x, \bar{x})$ les deux systèmes de formes, considérées comme formes algébriques en dx_i et $d\bar{x}_i$ soient transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(IV) \quad \varpi_i = a_{i1} \omega_1 + \dots + a_{in} \omega_n.$$

L'existence des fonctions φ_i est donc liée aux conditions de résolubilité du système algébrique (IV). Il est même possible de substituer aux formes ω_i et ϖ_i de formes ω_i^* et ϖ_i^* telles que le problème (IV) se ramène à la recherche des conditions de compatibilité des équations :

$$(V) \quad \varpi_i^* = \omega_i^*$$

Conformément à la théorie générale des systèmes de PFAFF il faut ajouter aux équations (5) les équations entre dérivées extérieures :

$$d\varpi_i^* = d\omega_i^*$$

on encore en vertu de (III) :

$$(VI) \quad \Sigma c_{jk}^i [\omega_j^*, \omega_k^*] = \Sigma c_{jk}^i [\varpi_j^*, \varpi_k^*]$$

On voit que les coefficients c_{jk}^i doivent être des invariants. Plaçons-nous dans le cas particulier le plus important, celui où ces invariants sont des constantes ; on démontre alors que la constance de ces coefficients algébriques est une condition nécessaire et suffisante de l'existence des transfor-

mations analytiques cherchées. Il y a même plus : Les transformations φ_i forment un groupe continu fini à n paramètres et les c_{jk}^i sont les constantes algébriques de structure de ce groupe au sens défini par S. LIE et E. CARTAN. Les problèmes relatifs à l'équivalence d'équations différentielles ou de formes différentielles, problèmes d'analyse, sont ainsi résolus par le 3^e théorème fondamental de la théorie algébrique des groupes de LIE : Etant donné un système de constantes c_{jk}^i satisfaisant à certaines relations algébriques déterminées, il existe un groupe continu fini de transformations admettant les c_{jk}^i comme constantes de structure et laissant invariantes les formes de PFAFF dont les dérivées extérieures ont ces mêmes constantes comme coefficients.

Nous allons montrer sur un exemple simple donné par M. CARTAN comment l'existence de transformations continues peut résulter des conditions algébriques de compatibilité de deux systèmes de PFAFF : Soit à trouver les conditions d'applicabilité de deux surfaces définies par leur ds^2 . Le ds^2 de chaque surface étant défini comme une forme différentielle quadratique des coordonnées x_1, x_2 , pour la première, $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, pour la seconde, les surfaces sont applicables l'une sur l'autre avec conservation de la métrique, s'il existe des correspondances ponctuelles biunivoques et bi-continues entre les x_i et les $\bar{x}_i$. Il est possible de trouver les conditions d'existence de ces correspondances continues par la considération des formes de PFAFF attachées au ds^2 des surfaces.

Le calcul de la dérivée extérieure de l'une de ces formes donne en effet :

$$d\omega_3^* = - K [\omega_1^*, \omega_2^*]$$

La quantité K jouant le rôle des coefficients de structure de la formule (VI) il faut pour que les surfaces soient applicables, que cette quantité, formée à partir des coefficients du ds^2 de chaque surface, soit la même pour les deux sur-

faces. C'est la courbure totale au sens de la géométrie différentielle. Cette théorie donne ainsi d'une façon purement algébrique un résultat classique des applications de l'analyse à la géométrie.

Le rôle du calcul non-commutatif des formes de PFAFF en analyse est donc considérable. Il permet en bien des cas d'opérer une substitution de l'algèbre à l'analyse de la façon suivante : la théorie des équations différentielles se ramène à celle des formes de PFAFF ; celle-ci se confond avec la théorie des groupes continus de LIE, et cette dernière est devenue, grâce à M. CARTAN, une théorie algébrique. La fécondité de ces méthodes algébriques se manifeste jusque dans les problèmes qui ont toujours paru être au centre de l'analyse : ceux qui se rapportent à l'intégration d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. Les transformations infinitésimales qui constituent un groupe de LIE peuvent en effet dans certains cas (1) être définies comme solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles donnant les variables transformées en fonction des variables primitives. Ce n'est pourtant pas directement par l'intégration de ces équations aux dérivées partielles que M. CARTAN s'assure de l'existence des fonctions cherchées, mais par l'étude algébrique préalable des coefficients de structure des formes de PFAFF attachées aux équations proposées. Nous rencontrons ici des considérations qui seront plus amplement développées au chapitre IV : dans une certaine mesure, l'existence de fonctions continues dépend des propriétés de structure d'un système discontinu de grandeurs algébriques. Le calcul des grandeurs non-commutatives en analyse opère ainsi un rapprochement du continu et du discontinu où s'efface la distinction des deux mathématiques.

(1) Il s'agit ici de groupes continus infinis : cf. la conférence de E. CARTAN sur la structure des groupes infinis, in *Séminaire de l'Institut H. Poincaré*, année 1936-1937.

CHAPITRE IV

Le continu et le discontinu.

L'analyse et la théorie des nombres.

Nous avons vu dans l'Introduction de cet ouvrage comment la distinction des deux mathématiques de WEYL pouvait être interprétée en termes d'une opposition entre la mathématique du fini et celle de l'infini ou plus exactement du dénombrable et du continu. Ce sont bien là deux mathématiques essentiellement distinctes puisque l'on peut définir dans le domaine du continu des opérations qui n'ont aucun sens dans le discontinu comme le prolongement analytique, en théorie des fonctions. C'est alors un problème fondamental pour la philosophie mathématique que d'établir une théorie des rapports du continu ou du discontinu, de l'arithmétique et de l'analyse.

On peut interroger à cet égard deux disciplines mathématiques différentes : la logique mathématique et la théorie des nombres, et l'on se trouve dans les deux cas en face d'une situation pareillement compliquée.

Un des faits les plus importants de la reconstruction des fondements des mathématiques entreprise par l'école « ensembliste » de DEDEKIND, CANTOR, FREGE et RUSSELL, fut certainement d'appuyer la définition des nombres entiers et finis de l'arithmétique ordinaire sur la considération d'ensembles infinis ou d'une infinité d'ensembles. C'est ainsi que la simple addition des nombres entiers repose chez

RUSSELL sur l'application de l'axiome de choix transfini. Tout en rendant hommage aux travaux de ses devanciers, HILBERT a jugé impraticable la voie dans laquelle ils s'étaient engagés et a montré comment l'axiomatisation de l'analyse présupposait l'axiomatisation de l'arithmétique, sans que celle-ci s'appuyât sur celle-là. On ne peut pourtant pas affirmer que la position d'HILBERT ait éliminé toute possibilité d'envisager le primat de l'infini sur le fini et ceci pour des raisons tirées tout d'abord de la logique mathématique elle-même. M. CAVAILLÈS a longuement étudié par ailleurs le sens des résultats de GÖDEL qui a démontré qu'il était impossible de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique en ne faisant appel qu'à des moyens empruntés à l'arithmétique. Cette découverte logique prend une importance singulière quand on la rapproche du développement historique de l'arithmétique effective. Un très grand nombre de résultats arithmétiques n'ont pu être obtenus qu'en faisant appel à des moyens analytiques très puissants. Il s'est ainsi développé depuis DIRICHLET une théorie analytique des nombres, et quel que soit l'espoir de certains arithméticiens d'éliminer un jour les démonstrations transcendantes de la théorie des nombres, le fait acquis subsiste de la liaison étroite de l'arithmétique et de l'analyse.

Le problème des rapports du continu et du discontinu se présente alors sous un aspect nouveau : il ne s'agit plus de savoir si l'existence d'une théorie analytique des nombres est compatible ou non avec la priorité logique des axiomes du discontinu par rapport aux axiomes du continu, mais bien d'étudier, au sein de la théorie analytique des nombres elle-même, le mécanisme des liaisons qui s'y affirment entre le continu et le discontinu.

Certains mathématiciens modernes distinguent à cet égard deux sortes de problèmes : il y aurait ceux, comme dit M. FUETER où les méthodes de la théorie des fonctions ser-

vent à la solution de problèmes purement arithmétiques, et ceux où la théorie des idéaux (c'est-à-dire l'arithmétique et l'algèbre supérieures) est indispensable pour la construction de certaines fonctions analytiques (1). Il y aurait en somme à distinguer entre les problèmes où l'analyse sert à l'arithmétique et ceux où l'arithmétique sert à l'analyse. Il est bien certain que les deux sortes de problèmes existent, mais ils sont, comme nous verrons, à ce point réciproques l'un de l'autre, qu'il est impossible de les étudier séparément. Tel semble bien être l'avis d'autres auteurs, comme M. HECKE, qui étudiant certaines fonctions dont l'importance est considérable en arithmétique, estime que les progrès de la théorie analytique des nombres imposent maintenant de partir délibérément de l'arithmétique pour construire ces fonctions (2). Il nous est impossible de procéder ici à une étude d'ensemble de la théorie analytique des nombres qui est au rang des théories les plus difficiles de toutes les mathématiques. Nous voudrions simplement montrer sur quelques exemples précis, comment on peut soutenir que si certaines fonctions analytiques servent à l'arithmétique, c'est que la définition même de ces fonctions s'appuie déjà sur la structure arithmétique de ces corps à l'étude desquels ces fonctions contribuent. Les deux théories distinguées par M. FUETER, la théorie analytique des nombres et celle qu'on pourrait appeler la théorie des origines arithmétiques de certaines fonctions analytiques n'en font probablement qu'une parce que la seconde absorbe la première. En ce domaine, comme en la plupart de ceux que nous avons étudiés plus haut, l'unité de l'algèbre et de l'analyse s'opère par le rôle des caractéristiques structurales et finitistes de l'algèbre dans la genèse du continu.

Soit k le corps des nombres rationnels. RIEMANN a défini

(1) R. FUETER, *Idealtheorie und Funktionentheorie*. Comptes-Rendus du Congrès des Math. Zurich, 1932, t. I, p. 83.

(2) E. HECKE, *Elliptische Modulformen*. *Math. Ann.*, t. 97, p. 213.

sur ce corps une fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ où n parcourt tous

les entiers rationnels > 0 de k , et où s est une variable complexe dont la partie réelle est toujours > 1 . Cette fonction admet encore une représentation sous forme de produit :

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \text{ où } p \text{ parcourt tous les nombres premiers}$$

de k . On devine par là le lien étroit qui unit la fonction $\zeta(s)$ à la répartition des nombres premiers p dans le corps k . C'est ainsi que RIEMANN a pu, au moyen de cette fonction, construire une fonction $F(x)$ qui donne le nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre positif arbitraire.

DIRICHLET et DEDEKIND ont généralisé la fonction $\zeta(s)$ en définissant pour un corps quelconque K une fonction $\zeta_K(s)$ susceptible également d'être représentée comme une somme et comme un produit d'une infinité de termes. Ces termes sont les normes d'idéaux du corps K . Voici ce qu'il faut entendre par là : On appelle idéal d'un corps de nombres algébriques tout ensemble de nombres du corps tel que :

- a) Si α fait partie de cet ensemble, il en est de même de $\lambda\alpha$, quel que soit l'entier λ .
- b) Si β est un autre élément de cet ensemble, $\alpha + \beta$ en fait aussi partie.
- c) Il y a un entier $\mu \neq 0$ tel que pour tout α de cet ensemble, $\mu\alpha$ soit entier.

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal d'un corps algébrique K . La norme $N(\mathfrak{A})$ de cet idéal est un nombre fixe, attaché à $\mathfrak{A}$ dans le corps K où on le considère (1).

(1) Voici la définition la plus simple de la norme : deux nombres α et β sont dits congrus entre eux modulo $\mathfrak{A}$, si leur différence $\alpha - \beta$ est dans $\mathfrak{A}$; on écrit $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{A}}$. Cette relation d'équivalence détermine une division en classes dans K et le nombre de ces classes est appelé la norme de l'idéal $\mathfrak{A}$.

Ceci posé, on a pour la fonction $\zeta_K(s)$ d'un corps quelconque :

$$\zeta_K(s) = \sum \frac{1}{[N(\mathfrak{A})]^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{[N(\mathfrak{P})]^s}}$$

la somme étant étendue à tous les idéaux entiers du corps K différents de 0, le produit à tous les idéaux premiers de K . Il est en général difficile de se servir de ces formules pour exprimer la fonction $\zeta_K(s)$ d'un corps quelconque ; une expression comme $\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}}$ ne peut en effet être formée à

partir de la fonction $\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ relative au corps des

rationnels que si l'on connaît les lois de la décomposition dans K des nombres premiers rationnels. Par contre, si l'on peut connaître la fonction $\zeta_K(s)$ d'un corps K ou tout au moins certaines de ses propriétés, autrement que par la connaissance de la façon dont se décomposent en idéaux premiers de K les nombres premiers rationnels, cette fonction peut alors justement servir à l'étude des lois relatives aux idéaux premiers de K . C'est ainsi par exemple que l'on peut démontrer au moyen de la fonction $\zeta_K(s)$ et de certaines autres qui sont liées à elle, qu'il existe une infinité d'idéaux premiers dans toute classe d'idéaux (1) du corps K (2). Ce résultat est bien caractéristique de la théorie analytique des nombres ; on y voit en effet, une fonction ana-

(1) Rappelons que les deux idéaux entiers ou fractionnaires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont équivalents : $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, si leur quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ est un idéal principal (formé à partir des multiples d'un seul nombre entier). Cette relation d'équivalence détermine une division en classes des idéaux du corps K .

(2) Voir pour tout ceci : E. HECKE, *Theorie der algebraischen Zahlen*. Leipzig, 1923.

lytique servir à la détermination de résultats relatifs à des notions de l'arithmétique du discontinu : nombres et idéaux premiers. Cette priorité de l'analyse par rapport à l'arithmétique n'est cependant qu'apparente, et nous allons voir comment l'utilisation arithmétique sur le corps K de la fonction $\zeta_K(s)$ n'est possible que parce que la détermination de cette fonction implique déjà la connaissance de certaines propriétés structurales et discontinues du corps de base. Ainsi par exemple le théorème cité plus haut et relatif à la répartition des idéaux premiers selon les classes d'idéaux de K , repose avons-nous dit sur une connaissance préalable de certaines propriétés de $\zeta_K(s)$; ce sont celles qui résultent de la formule :

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \zeta_K(s) = h \times$$

où h est le nombre de classes du corps et $\times$ un autre invariant attaché également au corps K . Ce qui à notre point de vue est essentiel dans l'égalité précédente, c'est que la détermination de la fonction $\zeta_K(s)$ s'appuie ainsi sur la décomposition arithmétique préalable des idéaux de K en h classes d'idéaux. Ce n'est plus là à proprement parler de la théorie analytique des nombres, c'est bien plutôt un fait de la théorie des origines arithmétiques de certaines fonctions analytiques. En somme on obtient le schéma suivant : la décomposition en classes du corps K permet de conclure à l'existence de la fonction $\zeta_K(s)$ dont la connaissance peut, par choc en retour sur le corps de base, servir à une étude plus approfondie de ce corps.

L'exemple précédent ne montre encore qu'une relation globale entre le nombre de classes d'un corps et les fonctions analytiques $\zeta_K(s)$. Il est possible, dans certains cas, d'associer de façon plus étroite la genèse de certaines fonctions analytiques au domaine discontinu qui résulte de la décomposition d'un ensemble en classes d'éléments équiva-

lents. Il se peut alors que ces fonctions soient ultérieurement susceptibles de servir à explorer les propriétés arithmétiques plus cachées de ce corps dont elles dépendent, mais leur existence même comme fonctions analytiques liées à un domaine de discontinuité est d'un intérêt mathématique et philosophique considérable. Alors que WEYL décrit comme un fait caractéristique de la mathématique nouvelle, le primat d'un domaine par rapport aux êtres algébriques définis sur ce domaine, nous voyons au sein même de la théorie des fonctions, apparaître par analogie avec l'« Abhängigkeit vom Grundkörper » de l'algèbre, une dépendance par rapport à un domaine de base, où s'affirme également en analyse la priorité de l'idée géométrique de domaine par rapport à celle de nombre ou de fonction.

Nous étudierons encore à cet égard le cas des fonctions automorphes. Considérons dans le plan de la variable complexe z les substitutions définies par les relations :

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des nombres entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

On démontre que ces substitutions forment un groupe discontinu G , dit groupe nodulaire, et l'on appelle fonction automorphe par rapport à ce groupe toute fonction $f(z)$ telle que :

$$f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Pour mieux voir la liaison entre la discontinuité du groupe et l'existence d'une fonction continue automorphe, nous allons définir ce qu'on appelle le domaine de discontinuité du groupe.

Le groupe opère une division en classes des points du plan complexe, et deux points appartiennent à la même classe, lorsqu'il existe une substitution S du groupe pour laquelle

on ait $z' = Sz$. L'ensemble des points transformables les uns dans les autres par une substitution du groupe forme évidemment un ensemble discontinu. Il est difficile de mettre en évidence un pareil ensemble, mais on peut néanmoins matérialiser la discontinuité du groupe de façon suivante : on envisage pour cela un domaine tel que tout point du plan complexe soit équivalent à un point et un seul de ce domaine. Un pareil domaine, qui ne contient que des points non équivalents entre eux, témoigne bien de la discontinuité du groupe modulaire puisque toute transformation du groupe portant sur un point du domaine de discontinuité, transforme ce point en un point qui n'appartient pas à ce domaine.

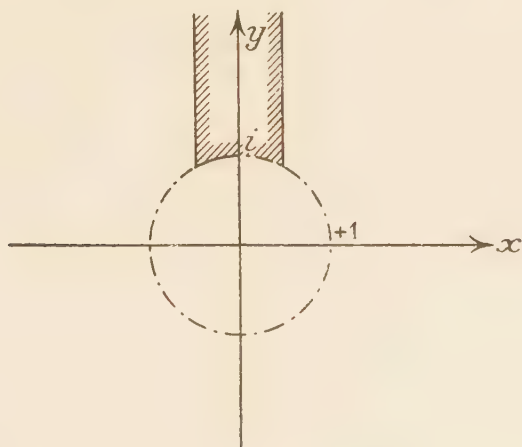


FIG. 1.

La figure ci-dessus représente ainsi un domaine de discontinuité ou domaine fondamental du groupe modulaire. Il est situé en dehors du cercle unité et il est limité par les droites $z = \pm \frac{1}{2} + iy$.

Ce domaine de discontinuité permet immédiatement de définir une fonction automorphe liée au groupe modulaire. Il existe en effet une fonction $w = J(z)$ (la fonction modulaire) qui assure la représentation conforme du domaine

de discontinuité du groupe modulaire sur la totalité du plan complexe w muni de deux coupures $-\infty \rightarrow 0$ et $1 \rightarrow +\infty$, et cette fonction modulaire est une fonction automorphe du groupe G . On a en effet $J(z) = J(Sz)$, S étant une substitution de G .

La fonction modulaire $J(z)$ dont la détermination repose ainsi sur la discontinuité d'un domaine de base, est, par ce que nous avons appelé une sorte de choc en retour, susceptible de très riches applications à la théorie des nombres. Soit en effet k' un corps quadratique imaginaire (obtenu en adjoignant au corps des rationnels un nombre $\sqrt{m}$, $m < 0$). Chaque classe d'idéaux de ce corps est définie par un nombre de la forme $\theta = \frac{c + \sqrt{m}}{a}$ [a, c, m sont entiers et rationnels, de plus $m < 0$ et $c^2 - m \equiv 0 \pmod{a}$].

Pour que deux classes d'idéaux soient égales, il faut et il suffit que les nombres θ et θ' qui leur correspondent soient équivalents entre eux par rapport au groupe modulaire G . Il y a donc autant de nombres $\theta_1 \dots \theta_h$ du corps k' dans le domaine de discontinuité de G qu'il y a de classes d'idéaux dans le corps. Soit h ce nombre de classes. La fonction $J(z)$ prend pour les h valeurs $\theta_1 \dots \theta_h$ h valeurs « singulières » différentes $J(\theta_1) \dots J(\theta_h)$ et l'intérêt algébrique de ces valeurs est considérable, elles appartiennent en effet à un sur-corps de k' d'une importance capitale : le corps de classes (1).

Nous obtenons donc bien là un schéma des rapports du continu et du discontinu analogue à celui que nous avons décrit plus haut. La fonction continue $J(z)$ sert, sans doute, à déterminer un ensemble discontinu de nombres d'un corps algébrique nouveau (2), mais l'existence même de

(1) Cf. notre thèse principale, chap. III.

(2) Les travaux de TAKAGI, ARTIN, HERBRAND, CHEVALLEY ont de façon générale éliminé l'analyse des théorèmes d'existence en théorie du corps de classes, mais dans le cas du corps quadratique imaginaire, la fonction $J(z)$ donne plus que l'existence du corps de classes, elle donne des nombres appartenant à ce corps.

cette fonction repose déjà sur une discontinuité fondamentale : celle du domaine de discontinuité du groupe modulaire. On peut donc bien observer sur ce pur exemple de la théorie analytique des nombres, comment le moment essentiel de la théorie réside dans la genèse d'une fonction continue à partir de la structure discontinue qui lui donne naissance.

CONCLUSION

Nous avons montré dans l'Introduction de cet ouvrage comment la distinction des deux mathématiques de WEYL tendait à opposer à l'analyse de l'infini les méthodes synthétiques de l'algèbre moderne. Nous avons ensuite montré au cours de nos quatre chapitres, que cette distinction ne doit pas être conçue dans le sens d'une opposition essentielle entre disciplines irréductibles, puisqu'il est possible de retrouver dans les théories modernes de l'analyse les points de vue qui caractérisent l'algèbre. La théorie des équations à une infinité de variables, la théorie arithmétique des fonctions algébriques, la théorie des métriques non-euclidiennes invariantes par un groupe discontinu, le calcul des formes de PFAFF et la théorie des groupes continus, la théorie analytique des nombres, ce sont là autant de théories intermédiaires entre l'algèbre et l'analyse, dont les méthodes sont algébriques, et dont les résultats s'étendent à l'analyse. Il est donc légitime d'opposer la mathématique du xx^e siècle à celle du xix^e , mais elles s'opposent comme la physique du continu et celle du discontinu. On pouvait croire jusque vers 1905 à la coexistence de deux domaines de faits distincts : ceux qui se présentaient comme continus, les ondes lumineuses, et ceux où apparaissait au contraire une structure discontinue : les atomes matériels. Depuis qu'EINSTEIN a introduit la discontinuité dans l'étude de la lumière et L. DE BROGLIE la continuité des ondes dans l'étude de la matière, il est impossible de maintenir l'ancienne idée de domaines de faits physiques distincts.

les uns des autres. La physique du continu représente un mode de traitement par équations différentielles des faits physiques, la physique du discontinu représente un mode de traitement des mêmes faits par d'autres méthodes : théories des groupes, calcul des matrices, statistiques quantiques, etc... Il existe ainsi une certaine analogie entre la physique contemporaine et la mathématique contemporaine, en ce sens qu'elles offrent l'une et l'autre le spectacle de faits susceptibles d'être à la fois étudiés par le calcul du continu et par le calcul du discontinu, mais alors que cette dualité de méthodes relatives aux mêmes faits est la source des principales difficultés de la physique contemporaine, elle est au contraire le témoignage de l'unité profonde des sciences mathématiques.

Le continu et le discontinu sont en effet en physique quantique des points de vue « complémentaires » au sens de BOHR ; c'est-à-dire que notre connaissance des aspects continus de la matière augmente dans la mesure où celle de ses aspects discontinus diminue et inversement : « Ce sont, écrit L. DE BROGLIE, comme les faces d'un objet que l'on ne peut contempler à la fois et qu'il faut cependant envisager tour à tour pour décrire complètement l'objet. Ces deux aspects, M. BOHR les nomme « aspects complémentaires », entendant par là que ces aspects d'une part se contredisent et d'autre part se complètent (1). »

Les rapports du continu et du discontinu, du fini et de l'infini, sont en mathématiques bien différents. Nous ne songeons pas seulement à des problèmes spéciaux, comme ceux de la théorie analytique des nombres dont nous avons parlé au chapitre IV, mais entendons bien envisager ici le problème général des rapports de l'analyse et de l'algèbre. Il existe, à cet égard, deux positions classiques :

(1) LOUIS DE BROGLIE, *La physique nouvelle et les quanta*, p. 242. Flammarion, éd. Paris, 1937.

pour l'une, le continu émane du discontinu comme l'infini du fini, par une sorte d'enrichissement progressif du fini et du discontinu. Il se trouve alors que dans les conditions où le passage à la limite est légitime, on découvre brusquement des propriétés nouvelles, liées au continu et à l'infini, et qui n'avaient pas d'équivalent dans le fini. Considérons par exemple un polynôme en z (z étant une variable complexe); il contient un nombre fini de termes; une série convergente d'une infinité de termes représente dans certains cas une fonction analytique, et, comme le fait remarquer M. MONTEL, le passage d'un nombre fini à un nombre infini de termes introduit le fait nouveau de l'existence d'un point singulier sans lequel la fonction analytique se réduirait à une constante. L'analyse ainsi présentée déborde l'algèbre et ses résultats ont longtemps semblé aux analystes ne pouvoir être retrouvés par des méthodes plus simples.

On peut également affirmer la priorité du continu et de l'infini et voir dans le fini et le discontinu soit une limitation de l'infini, soit une approximation de l'infini. Cette attitude est peut-être plus philosophique que mathématique : l'infini cartésien est premier par rapport au fini comme la continuité chez BERGSON est première par rapport au discontinu. Nous avons du reste indiqué comment on la retrouvait surtout dans celles des disciplines mathématiques qui sont le plus en contact avec la pensée philosophique : la théorie des ensembles de CANTOR et la logique mathématique de FREGE et de RUSSELL. Il n'en est pas moins vrai que l'on peut retrouver dans les théorèmes authentiquement mathématiques d'approximation une image de pareils rapports. Nous avons rappelé par exemple au chapitre I de notre thèse principale, comment on pouvait approcher une fonction continue par des polynômes; la fonction continue est donc bien dans cette théorie conçue comme donnée antérieurement à l'infinité discontinue des polynômes qui l'approchent.

Nous croyons qu'il est possible d'observer dans le mouvement des mathématiques au xx^e siècle une troisième façon de concevoir les rapports de l'analyse et de l'algèbre, du continu et du discontinu, de l'infini et du fini. En cherchant à faire naître l'infini par dilatation du fini ou le fini par rétrécissement de l'infini, on considère toujours en extension le fini comme une partie de l'infini et l'on ne peut que se heurter sans cesse à l'impossibilité d'épuiser l'infini. Une attitude bien différente est celle de beaucoup de mathématiciens contemporains (1) qui voient dans le fini et l'infini non pas les deux termes extrêmes d'un passage à opérer, mais deux genres d'êtres distincts, doués chacun d'une structure propre, et susceptibles de soutenir entre eux des rapports d'*imitation* ou d'*expression*. Nous entendons par rapports d'*imitation* les cas où la structure interne de l'infini *imite* celle du fini, et par rapports d'*expression*, les cas où la structure d'un domaine fini et discontinu *enveloppe* l'existence d'un autre domaine continu ou infini qui se trouve ainsi *exprimer* l'existence de ce domaine fini auquel il est adapté. Certains de nos exemples mettent en lumière des rapports d'imitation ; d'autres des rapports d'expression. Lorsqu'HILBERT transporte en analyse des méthodes de décomposition dimensionnelle d'origine algébrique, il impose à l'espace fonctionnel une structure qui imite celle d'un espace à un nombre fini de dimensions. Lorsque POINCARÉ envisage un groupe discontinu de transformations et la fonction continue automorphe attachée à ce groupe, il rapproche deux genres d'êtres totalement étrangers de nature, mais l'existence de la fonction continue n'en exprime pas moins les propriétés du domaine de discontinuité qui sert à la définir. En s'attachant ainsi chaque fois, non pas à la quantité des éléments, mais à

(1) Cf. l'adage, souvent reproduit, de M. ANDRÉ BLOCH : « *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.* »

l'existence ou à l'armature des êtres que l'on compare, on découvre ainsi entre le fini et l'infini des analogies de structures et des adaptations réciproques, d'où il résulte que l'unité des mathématiques est essentiellement celle des schémas logiques qui président à l'organisation de leurs édifices. Nous retrouvons ainsi des considérations qui rejoignent celles que nous avons développées dans notre thèse principale. Notre *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques* tend en effet à montrer qu'il est possible de retrouver au sein des théories mathématiques, des Idées logiques incarnées dans le mouvement même de ces théories. Les analogies de structures et les adaptations d'existences que nous avons essayé de décrire ici entre l'analyse et l'algèbre n'ont pas d'autre but que de contribuer à mettre en lumière l'existence au sein des mathématiques de schémas logiques, qui ne sont connaissables qu'à travers les mathématiques elles-mêmes, et en assurent à la fois l'unité intellectuelle et l'intérêt spirituel.

Vu : le 28 juin 1937.

Le Doyen de la Faculté des Lettres
de l'Université de Paris,

H. DELACROIX.

Vu et permis d'imprimer :
le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

INDEX

(Les chiffres renvoient aux pages).

-
- AHLFORS, 34, 35.
ARTIN, 52.
BERGSON (H.), 56.
BLOCH (A.), 57.
BOHR (N.), 55.
BOREL (E.), 8.
BROGLIE (L. DE), 36, 54, 55.
CANTOR (G.), 8, 44, 56.
CARTAN (E.), 27, 38-43.
CAVAILLÈS (J.), 45.
CAYLEY, 29.
CHEVALLEY (C.), 52.
DEDEKIND, 26, 44, 47.
DIRICHLET, 45, 47.
DUBOURDIEU (J.), 38.
EINSTEIN (A.), 54.
FREGE (G.), 44, 56.
FUETER (R.), 45, 46.
GAUSS, 7, 29.
GÖDEL (K.), 45.
GRASSMANN, 38.
HASSE (N.), 8.
HECKE (E.), 46, 48.
HEISENBERG (W.), 6.
HELLINGER (E.), 21.
HERBRAND (J.), 52.
HILBERT (D.), 11, 19, 20, 21, 37, 45, 57.
KAHLER (E.), 38.
KLEIN (F.), 29.
LEBESGUE (H.), 8, 18.
LIE (S.), 42, 43.
LOBATCHEWSKY, 29, 32, 35.
MONGE, 7, 29.
MONTEL (P.), 56.
NEUMANN (J. VON), 37, 38.
NEVANLINNA (R.), 33-35.
OSGOOD, 23.
PFAFF (formes de) 39-43.
PICARD (E.), 25, 33.
POINCARÉ (H.), 30, 35, 57.
RIEMANN, 8, 23, 24, 29, 30, 31, 34, 35, 46, 47.
RIEMANN-ROCH (théorème de) 23, 25, 26.
RUSSELL (B.), 44, 45, 56.
SCHRÖDINGER (E.), 6, 36.
SHIMIZU, 34.
TAKAGI, 52.
VAN DER WAERDEN (B. L.), 8, 38.
WEBER, (H.), 26.
WEYL (H.), 5, 8, 9, 10, 11, 29, 50.
-

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION. — La distinction des deux mathématiques.....	5
CHAPITRE I. — Structure d'un domaine de grandeurs et décomposition de ses éléments. Les considérations dimensionnelles en analyse.....	13
CHAPITRE II. — Le domaine et les nombres. Les métriques non-euclidiennes dans la théorie des fonctions analytiques...	27
CHAPITRE III. — L'algèbre des grandeurs non-commutatives. Les formes de Pfaff et la théorie des équations différentielles.	36
CHAPITRE IV. — Le continu et le discontinu. L'analyse et la théorie des nombres.....	44
CONCLUSION.....	54

2483 — Imp. Jouve et Cie, 15, rue Racine, Paris. — 9-1937
